

CHƯƠNG VI

TÍNH NG H P CHUYỂN ĐỘNG NG C A ĐI M VÀ V T R N

Bài 18. TÍNH NG H P CHUYỂN ĐỘNG NG C A ĐI M

I. Định nghĩa các chuyển động

Giả sử có đường đi m M, hệ quy chiếu động Oxyz và hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$ (hình 18 - 1).

- Chuyển động của M so với hệ quy chiếu động gọi là chuyển động tịnh tiến, tịnh tiến ta có quỹ đạo tịnh tiến và vận tốc tịnh tiến.

Ký hiệu $\vec{v}_r$

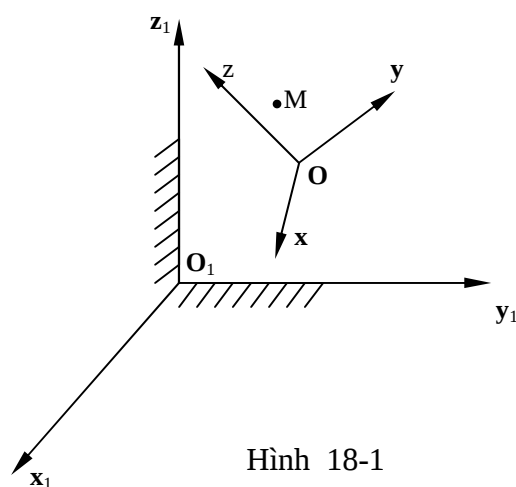
- Chuyển động của M cùng với hệ quy chiếu động gọi là chuyển động quay, quay ta có quỹ đạo quay và vận tốc quay.

Ký hiệu $\vec{v}_e$

- Chuyển động của đi m so với hệ quy chiếu cố định gọi là chuyển động trượt, trượt ta có quỹ đạo trượt và vận tốc trượt.

Ký hiệu $\vec{v}_a$

Vậy, chuyển động trượt là tổng hợp của hai chuyển động, chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.



Hình 18-1

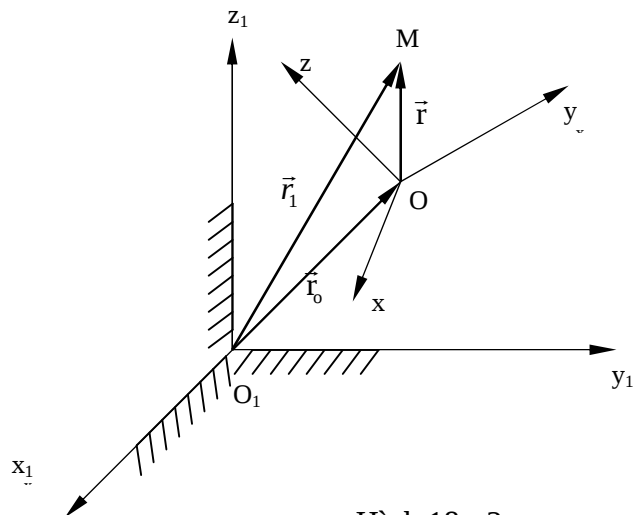
II. Định lý hợp vận tốc

Tại mỗi thời điểm, vận tốc trượt của chất điểm M bằng tổng hình học của vận tốc quay và vận tốc tịnh tiến.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (18 - 1)$$

Chứng minh:

Điểm điểm M được xác định bởi vectơ $\vec{r}$ và $\vec{r}_1$, gốc O được xác định bởi $\vec{r}_0$. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của hệ trục oxy, ta có $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



Hình 18 - 2

Theo hình 18 – 2, ta có:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}$$

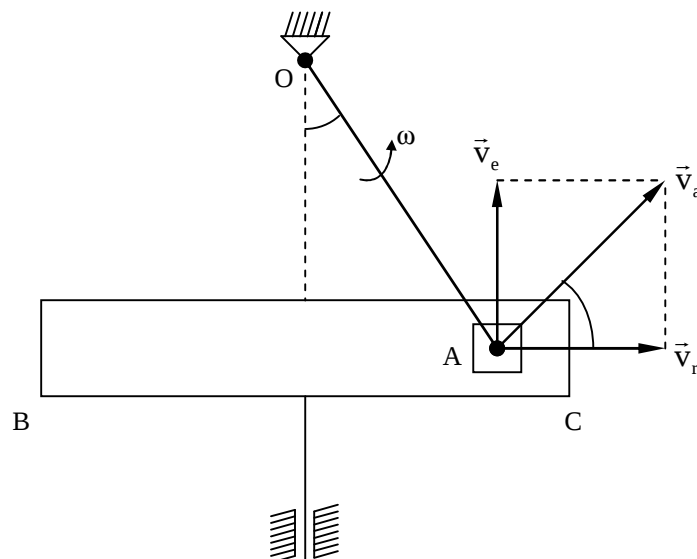
Vận tốc tuyế của M là:

$$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ \vec{v}_a &= \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left[\vec{v}_0 + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \right] \\ \text{hay } \vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_e\end{aligned}$$

Vậy, định lý đã được chứng minh.

Ví dụ: Cho cần cẩu tay quay culit với tay quay OA = 200mm quay đều với vận tốc $\omega = 3\pi \text{ rad/s}$, Con chy A nối bằng bản lề vào đầu mút tay quay chy trong rãnh BC làm culit chuyển động lên xuống. Xác định vận tốc của culit tại thời điểm tay quay lệch góc $= 30^\circ$ so với phương thẳng đứng.

Giải



- Chuyển động của con chy A trong rãnh BC là chuyển động thẳng đều với vận tốc $\vec{v}_r$ hướng theo phương ngang.
- Chuyển động của BC (culit) so với khung máy là chuyển động theo vận tốc $\vec{v}_e$ hướng theo phương thẳng đứng.
- Chuyển động của con chy A so với khung máy là chuyển động tuyếtt đi với vận tốc $\vec{v}_a$ tiếp tuyến với quỹ đạo tròn tại A.

Theo định lý hợp vận tốc ta có:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Theo sơ đồ hợp vận tốc, ta có:

Vận tốc của culit là:

$$\begin{aligned} v_e = v = v_a \cdot \sin \alpha &= OA \cdot \omega \cdot \sin \alpha \\ &= 200 \cdot 10^{-3} \cdot 3\pi \cdot \frac{1}{2} = 0,3\pi \text{ m/s} \end{aligned}$$

III. Định lý hợp gia tốc

Tại mỗi thời điểm, gia tốc tuyếtt đi bằng tổng hình học của gia tốc theo, gia tốc thẳng đứng và gia tốc Criolit.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (18-2)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \vec{a}_a &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_a) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left(\vec{v}_o + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \right] \\ &= \left(\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right) + \left[\vec{a}_o + \left(x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right) \right] + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Tổng hợp theo hợp vận tốc, ta có:

$$\text{Gia tốc thẳng đứng: } \vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

$$\text{Gia tốc theo: } \vec{a}_e = \vec{a}_o + \left(x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right)$$

$$\text{Gia tốc Oriolit: } \vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

Vậy: $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ (định lý đã được chứng minh)

• Chú ý:

- Trường hợp h p h quy chiếu đ ng Oxyz chuyển đ ng tnh tnh thì

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \quad (\text{nên } \vec{a}_c = 0)$$

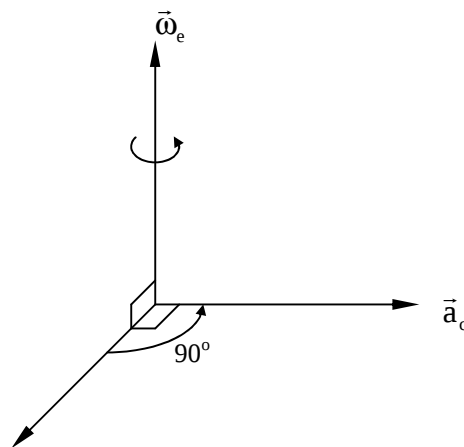
V y, khi chuyển đ ng theo là chuyển đ ng tnh tnh thì gia t c tuy t đ i b ng tnh hình h c gia t c theo và gia t c tnh đ i.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (18-3)$$

- Trường hợp h p h qui chiếu đ ng Oxyz chuyển đ ng quay quanh trục c đ nh v i véct v n t c góc $\vec{\omega}_e$ thì gia t c Oriolit là $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r$ (18-4)

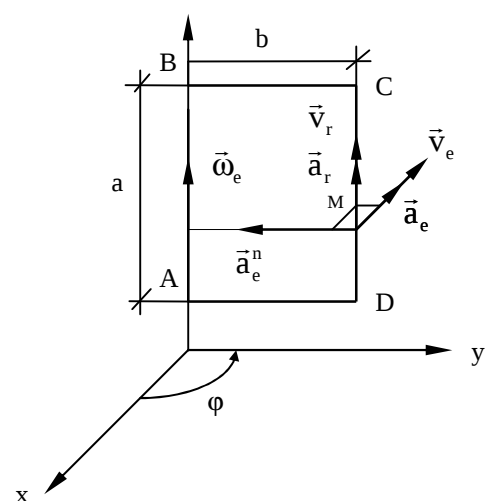
+ T i th i đ i m kh o sát n u $\vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$ ho c $\vec{v}_r = 0$ hay $\vec{\omega}_e = 0$ thì t i th i đ i m này $\vec{a}_c = 0$

+ N u $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ (hình 18-3) thì quy t c tìm ph p ng chiếu c a $\vec{a}_c$ nh sau: quay $\vec{v}_r$ quanh g c c a nó theo chiếu quay c a h đ ng quanh trục $\vec{\omega}_e$ m t góc 90° , ta có ngay chiếu c a $\vec{a}_c$ và giá tr c a nó b ng $2 \vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r$.



Ví dụ: Một t m ch v t có các c nh là a và b quay quanh trục tnh đ ng theo quy luật $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Điểm M chuyển đ ng đ c theo DC v i quy luật $s = 3t^2$ (m, s). Tìm v n t c, gia t c tuy t đ i c a M theo th i gian t.

Giải



- M chuyển động thẳng đều theo phương thẳng đứng DC với vận tốc thẳng đều $\vec{v}_r$ và gia tốc thẳng đều $\vec{a}_r$ nằm trên trục này, đường thẳng:

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 6t \quad ; \quad a_r = \frac{d^2s}{dt^2} = 6$$

- Chuyển động của M cùng với ABCD là chuyển động theo quỹ đạo thẳng tròn có bán kính b và vận tốc $\vec{v}_e$ vuông góc với bán kính tại thời điểm đang xét.

$$v_e = r \cdot \omega = b \cdot \frac{d\varphi}{dt} = bt$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

$$\text{với} \quad a_e^n = r \cdot \omega^2 = b \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = b \cdot t^2$$

$$a_e^\tau = r \cdot \varepsilon = b \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = b$$

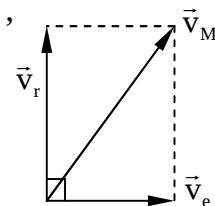
Do vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ nằm trên Az nên có $\vec{\omega}_e // \vec{v}_r$,

suy ra: $\vec{a}_c = 0$

Vận tốc tuyế t đ i c a M:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$v_M = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{(6t)^2 + (bt)^2} \quad (\text{cm/s})$$

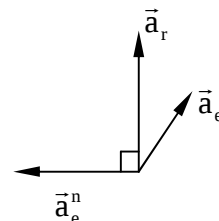


Gia tốc tuyế t đ i c a M:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

$$a_M = \sqrt{a_r^2 + (a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (bt)^2 + b^2} \quad (\text{cm/s}^2)$$



CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là chuyển động thẳng đều, tuyế t đ i và chuyển động theo ? Phân tích qua ví dụ cụ thể.
2. Giải thích hiện tượng: Khi lóng gió, nhúng gi t m a l i r i xiên trên thành tàu đang ch y? Đ xiên c a gi t m a ph thu c vào y u t nào?
3. Phát bi u đ nh lý h p v n t c, h p gia t c c a đ i m chuyển động t ng h p.

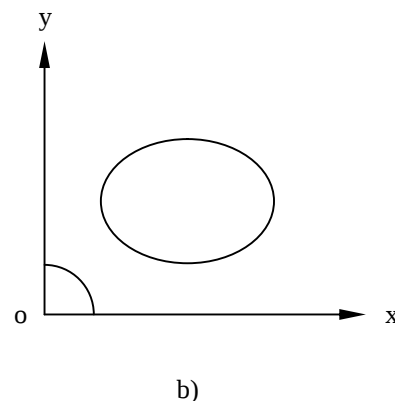
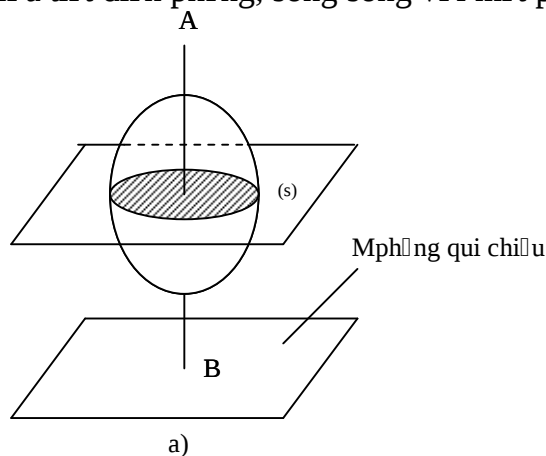
Bài 19. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG**I. Định nghĩa**

Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mọi điểm thuộc vật luôn đi động trong những mặt phẳng có đường song song với một phẳng quy chiếu.

Ví dụ: Khi xe chạy trên đường, mọi điểm trên bánh xe di chuyển trong những mặt phẳng song song với mặt phẳng thẳng đứng chứa trục đường, nên bánh xe chuyển động song phẳng.

II. Khảo sát chuyển động của hình phẳng**1. Phân tích quá trình chuyển động của hình phẳng**

Bài toán khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của một titik điểm phẳng của nó trong mặt phẳng chứa titik điểm phẳng, song song với mặt phẳng quy chiếu. (hình 19-1 a, b)



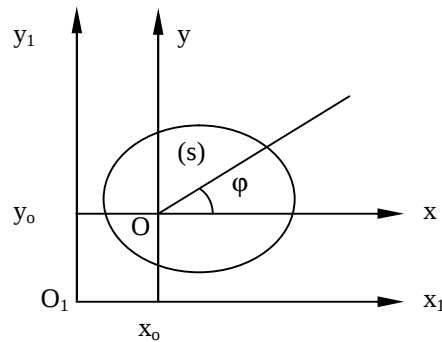
Xét chuyển động của hình phẳng (s) trong mp (P). Chọn hệ quy chiếu có đường $O_1x_1y_1$. Lấy điểm O tùy ý thuộc (s) và gắn vào đó hệ trục Oxy có trục Ox và Oy luôn song song với O_1x_1 và O_1y_1 . Chuyển động của hình phẳng (s) được phân tích thành 2 chuyển động:

- Chuyển động tịnh tiến của hệ trục Oxy đối với hệ quy chiếu có đường $O_1x_1y_1$ (chuyển động theo).
- Chuyển động quay quanh điểm O của hình phẳng đối với hệ trục Oxy (chuyển động tịnh tiến)

Vậy chuyển động song phẳng của vật rắn có thể phân tích thành 2 chuyển động: chuyển động tịnh tiến cùng với trục và chuyển động quay của vật quanh trục (hình 19-2).

Do đó, phân tích quá trình chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng là:

$$x_o = x_o(t) ; y_o = y_o(t) ; \varphi = \varphi(t)$$



2. Các yếu tố động học của hình phẳng

- Chuyển động của hệ trục Oxy là chuyển động tịnh tiến cùng với các O nên trạng thái động học được xác định là vận tốc $\vec{v}_0$ và gia tốc $\vec{a}_0$.
- Chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục oxy được xác định bằng vận tốc góc ω và gia tốc góc ε

* Chú ý: Các đại lượng $\vec{v}_0$, $\vec{a}_0$ phụ thuộc vào vị trí chọn các

III. Khảo sát chuyển động của điểm thuộc hình phẳng

1. Phương trình chuyển động của điểm

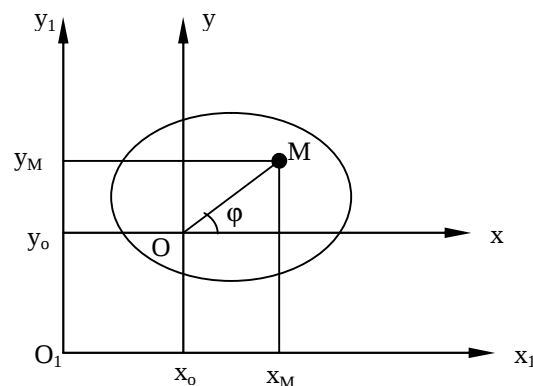
Xét điểm M thuộc hình phẳng S nằm cách các O một khoảng $OM = R$ (hình 19 - 3). Vị trí của M được xác định:

$$x_M = x_0 + R \cdot \cos \varphi$$

$$y_M = y_0 + R \cdot \sin \varphi$$

vì x_0 , y_0 , φ luôn thay đổi theo thời gian, nên phương trình chuyển động của M là:

$$\begin{aligned} x_M(t) &= x_0(t) + R \cdot \cos \varphi(t) \\ y_M(t) &= y_0(t) + R \cdot \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (19-2)$$



Hình 19 – 3

2. Vận tốc của điểm

Biểu thức giải tích của vận tốc.

Vận tốc của điểm M được xác định qua hình chiếu của nó trên hệ trục các định $O_1x_1y_1$

$$\begin{cases} v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = x'_0 - R.\varphi'.\sin\varphi = x'_0 - R.\omega.\sin\varphi \\ v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = y'_0 + R.\varphi'.\cos\varphi = y'_0 + R.\omega.\cos\varphi \end{cases} \quad (19-3)$$

Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng:

Như đã phân tích, chuyển động song phẳng của vật thể chất là tổng hợp của hai chuyển động:

- Chuyển động tịnh tiến cùng với trục O (chuyển động theo), nên :

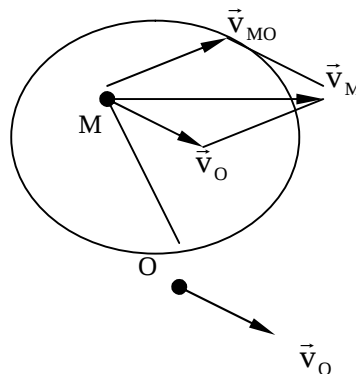
$$\vec{v}_e = \vec{v}_o$$

- Chuyển động quanh trục O (chuyển động tịnh tiến quay). Nên vận tốc của M:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{Mo}$$

Mà $\vec{v}_{Mo} \perp OM$ và $v_{Mo} = OM.\omega$ (ω là vận tốc góc của vật)

Theo định lý hợp vận tốc, ta có: $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{Mo}$

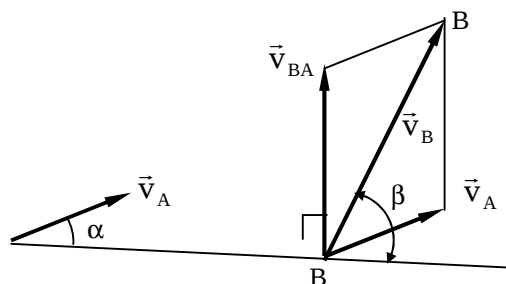


Định lý: Vận tốc của điểm thuộc hình phẳng bằng tổng hình học vận tốc của trục với vận tốc của điểm khi hình phẳng quay quanh trục.

Áp dụng cho 2 điểm A, B bất kỳ thuộc hình phẳng, ta có:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (19-4)$$

Trong đó, $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B do hình phẳng quay quanh trục A.



Chỉu động th c v a thi t l p lên ph ng AB, ta đ c:

Khoa Cơ khí – Trường Cao đẳng Kỹ thuật Lý Tự Trọng

$$hc_{AB} \vec{v}_B = hc_{AB} \vec{v}_A$$

$$\text{hay } v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha \quad (19-5)$$

Ví dụ: Hình chiếu v của 2 điểm bất kỳ thuộc hình phẳng lên pháp tuyến nối với hai điểm thì bằng nhau.

Tâm v của t c t c t c và s phân b v của t c các điểm thuộc hình phẳng:

Tâm v của t c t c t c t c:

Tại thời điểm khảo sát, t n t i điểm P thuộc hình phẳng có v của t c bằng không thì điểm đó gọi là tâm v của t c t c t c t c.

Tại m i thời điểm n u $\omega \neq 0$, có m t điểm duy nhất thuộc hình phẳng s có v của t c bằng không (t n t i duy nhất m t tâm v của t c t c t c t c).

S phân b v của t c các điểm thuộc hình phẳng:

Ta xét s phân b v của t c c a điểm thuộc hình phẳng chuyển động song phẳng. Có 2 khả năng có thể xảy ra:

– Trường hợp $\omega \neq 0$:

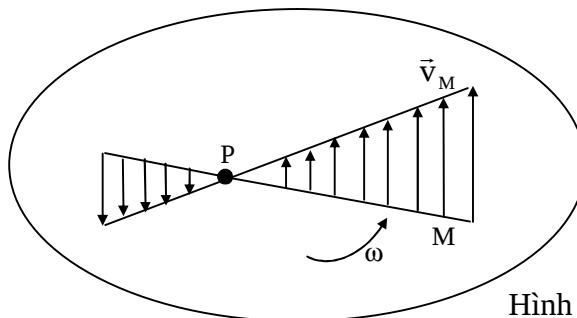
Lấy tâm v của t c t c t c P làm c c, khi đó:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}$$

$$\text{hay } \vec{v}_M = \vec{v}_{MO} \quad (\text{vì } \vec{v}_P = 0)$$

$$\text{v i } \vec{v}_M \perp MP \text{ và } v_M = MP \cdot \omega$$

Ví dụ, tại m i thời điểm, v của t c các điểm thuộc hình phẳng phân b giống nhau khi nó đang quay quanh tâm v của t c t c t c P với v của t c góc ω (hình 19-4)



Hình 19-4

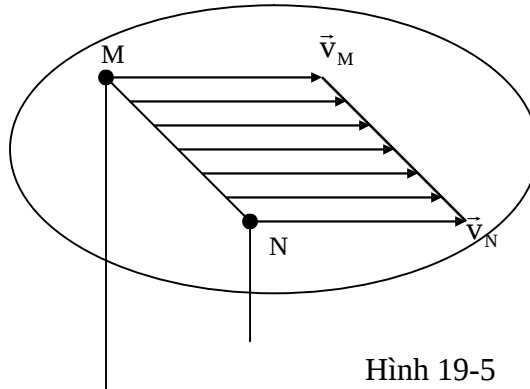
– Trường hợp $\omega = 0$ (không t n t i tâm v của t c t c t c t c)

Xét v của t c 2 điểm M, N bất kỳ c a hình phẳng s, ta có:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{v}_{MN}$$

Do đó : $v_{MN} = MN \cdot \omega = 0$ nên $\vec{v}_M = \vec{v}_N$

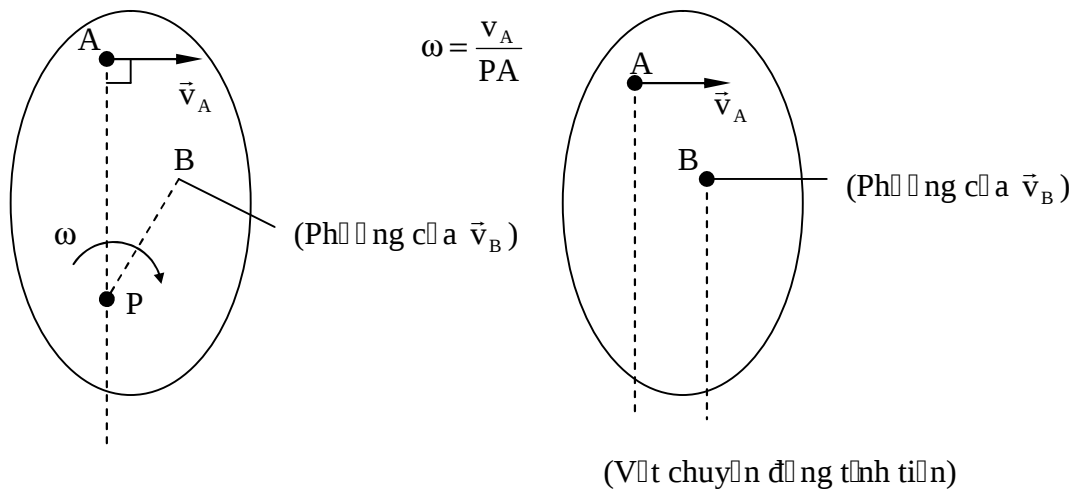
Ví dụ khi $\omega = 0$ thì v của t c các điểm thuộc hình phẳng đều bằng nhau (hình phẳng chuyển động tịnh tiến t c t c t c t c) (hình 19-5)



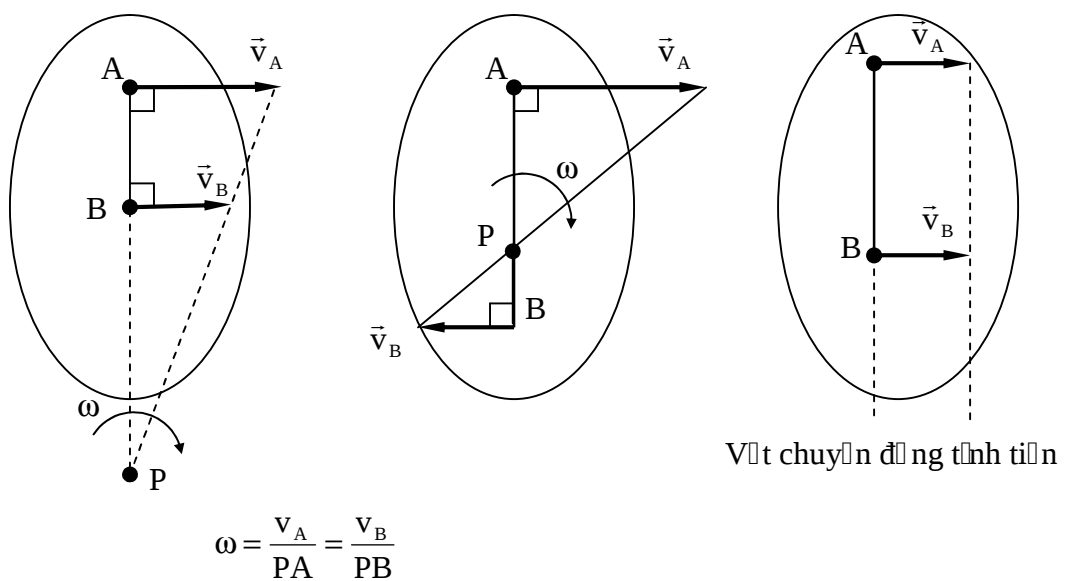
Hình 19-5

Một số quy tắc xác định tâm vận tốc tức thời:

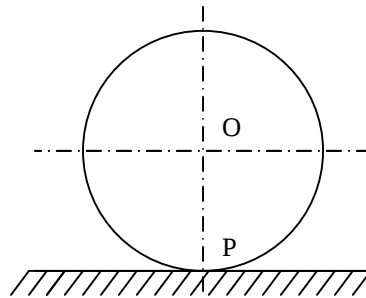
- Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc điểm B:



- Biết vận tốc 2 điểm A và B có phương // nhau và $\perp AB$:



- Vật lăn không trượt trên mặt phẳng cố định: tiếp điểm là tâm vận tốc tức thời



Hình 10 - 5

3. Gia tốc của điểm

Biểu thức giải tích:

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = \frac{d^2 x_M}{dt^2} = x_o'' - R \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi - R \omega^2 \cos \varphi \\ a_{My} = \frac{d^2 y_M}{dt^2} = y_o'' + R \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi - R \omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (19-6)$$

Quan hệ gia tốc giữa hai điểm:

Định lý: Gia tốc của điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của gia tốc của O và gia tốc của điểm M trong chuyển động tròn quanh O.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO} = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO}^{\tau} + \vec{a}_{MO}^n \quad (19-7)$$

Trong đó:

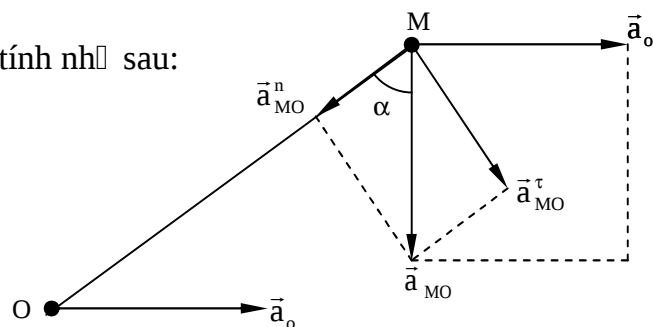
$\vec{a}_{MO}^{\tau}$ và $\vec{a}_{MO}^n$ được tính như sau:

$$\vec{a}_{MO}^{\tau} = MO \cdot \varepsilon$$

$$\vec{a}_{MO}^n = MO \cdot \omega^2$$

$$a = MO \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\vec{a}_{MO}^{\tau}}{\vec{a}_{MO}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$



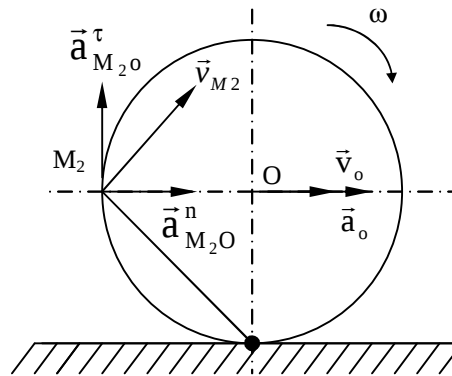
Tâm vận tốc tức thời:

Điểm Q thuộc vật có gia tốc bằng không là thời điểm khi o sát đến là tâm gia tốc tức thời.

Tọa độ điểm vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng không đồng thời bằng không thì tọa độ duy nhất của tâm gia tốc.

* Ví dụ: Một bánh xe bán kính $R = 0,5\text{m}$ lăn không trượt trên mặt phẳng ngang cố định. Tính vận tốc và gia tốc của điểm M_2 . Biết tại thời điểm bánh xe có vận tốc $v_o = 1\text{m/s}$, $a_o = 1,5\text{m/s}^2$

Giải



$$M_1 \equiv P$$

Vì bánh xe lăn không trượt nên M_1 là tâm vận tốc tức thời: $v_{M1} = 0$

$$\text{Ta có: } v_o = M_1O \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{M_1O} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\text{Tính } v_{M2}: v_{M2} = M_1M_2 \cdot \omega = R \cdot \sqrt{2} \cdot \omega = 0,5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2$$

$$v_{M2} = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Gia tốc của điểm M_2 :

$$\text{Ta có: } \vec{a}_{M2} = \vec{a}_o + \vec{a}_{M2}^{\tau} + \vec{a}_{M2}^n$$

Trong đó:

$$\vec{a}_{M2}^{\tau} = M_2O \cdot \varepsilon = R \cdot \varepsilon = a_o = 1,5 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{M2}^n = R \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Vậy: } a_{M2} = \sqrt{(a_o + a_{M2O}^n)^2 + (a_{M2O}^{\tau})^2}$$

$$a_{M2} = \sqrt{(1,5 + 2)^2 + (1,5)^2} \approx 1,8 \text{ m/s}^2$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là chuyển động song phẳng của vật rắn? Cho ví dụ.
2. Hãy lấy ví dụ chứng tỏ rằng luôn luôn có thể phân tích chuyển động song phẳng thành chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.
3. Tâm vận tốc tức thời là gì? Trình bày cách xác định tâm vận tốc tức thời?
4. tâm gia tốc tức thời là gì?
5. Viết biểu thức xác định gia tốc của 2 điểm thuộc hình phẳng chuyển động song phẳng.